MATHÉMATIQUES

ÉPREUVES ÉCRITES

Le programme des épreuves de l'agrégation n'est pas rédigé comme un plan de cours. Il décrit un ensemble de connaissances que le candidat doit maîtriser. Il comporte des répétitions lorsque des notions interviennent naturellement à plusieurs endroits.

D'une façon générale, les candidats doivent connaître des applications qui illustrent les notions générales. Le programme en propose ainsi un certain nombre. Il ne s'agit que de simples suggestions d'applications possibles, qui peuvent être complétées ou remplacées par d'autres. C'est le cas, en particulier, des passages du texte en italiques et repérés par des étoiles.

Dans les paragraphes I à V qui suivent, tous les corps sont supposés commutatifs.

I. Algèbre linéaire

1. Espaces vectoriels, applications linéaires. Produit d'espaces vectoriels. Sous-espaces, image et noyau d'une application linéaire. Espaces quotients. Somme de sous-espaces, somme directe, supplémentaires. Familles libres, génératrices ; bases. Algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel E, groupe linéaire GL(E).

2. Espaces vectoriels de dimension finie. Existence de bases, de supplémentaires d'un sous-espace. Rang d'une application linéaire, rang d'un système d'équations linéaires. Espace dual. Transposée d'une application linéaire. Base duale. Bidualité. Orthogonalité.

3. Applications multilinéaires. Déterminant d'un système de vecteurs, d'un endomorphisme. Groupe spécial linéaire SL(E). Orientation.

4. Matrices et opérations matricielles. Algèbre des matrices carrées à coefficients dans un anneau commutatif. Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Déterminant d'une matrice.

5. Matrices à coefficients dans un corps. Rang d'une matrice. Représentations matricielles d'une application linéaire. Changement de base. Méthode du pivot de Gauss. Application à la résolution de systèmes d'équations linéaires, au calcul de déterminants, à l'inversion des matrices carrées.

6. Sous-espaces stables d'un endomorphisme.Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres. Polynôme caractéristique, polynôme minimal. Théorème de Cayley-Hamilton. Diagonalisation, trigonalisation, applications. Sous-espaces caractéristiques, décomposition de Dunford. Réduction des endomorphismes nilpotents (théorème de Jordan). Exponentielle des matrices réelles ou complexes. Théorème de Perron-Frobenius ; exemples d'applications à l'analyse et aux probabilités.

II. Groupes et géométrie

Les différentes notions de théorie des groupes introduites dans les paragraphes suivants seront illustrées et appliquées dans des situations géométriques.

1. Groupes, morphismes de groupes. Produit direct de groupes. Sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Ordre d'un élément. Sous-groupes distingués (ou normaux), groupes quotients. Opération d'un groupe sur un ensemble. Stabilisateur d'un point, orbites, espace quotient. Formule des classes. Classes de conjugaison.

2. Groupes cycliques. Groupes abéliens de type fini. Sous-groupes discrets d'un espace vectoriel réel. Réseaux. Groupe des racines complexes énièmes de l'unité, racines primitives.

3. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions, en produit de cycles à supports disjoints. Signature. Groupe alterné.

4. Groupes classiques : groupe général linéaire, groupe spécial linéaire ; groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal ; groupe unitaire, groupe spécial unitaire.

5. Groupe affine. Groupe des homothéties-translations. En dimension 2 ou 3, groupe des isométries laissant stable une partie de l'espace.

III. Anneaux, corps, polynômes et fractions rationnelles

1. Anneaux unitaires, morphisme d'anneaux, sous-anneaux. L'anneau **Z** des entiers relatifs. Produit d'anneaux. Idéaux d'un anneau, anneaux quotients. Idéaux premiers, idéaux maximaux d'un anneau commutatif. Notion de module sur un anneau commutatif, d'algèbre sur un anneau commutatif.

2. Algèbre des polynômes à une ou plusieurs indéterminées sur un anneau commutatif. Polynômes homogènes. Polynômes symétriques.

3. Corps, sous-corps. Caractéristique. Extension de corps. Corps des fractions d'un anneau intègre. Le corps **Q** des nombres rationnels. Le corps **R** des nombres réels. Le corps **C** des nombres complexes. Théorème de d'Alembert-Gauss. Quaternions.

4. Divisibilité dans les anneaux commutatifs intègres. Éléments irréductibles, éléments inversibles, éléments premiers entre eux.
Anneaux factoriels. Plus grand diviseur commun, plus petit multiple commun. Factorialité de A[X] quand A est un anneau factoriel.
Anneaux principaux. Théorème de Bézout.
Anneaux euclidiens. Algorithme d'Euclide. Cas de l'anneau **Z** et de l'algèbre K[X].

5. Congruences dans **Z**. Nombres premiers dans **Z**. Étude de l'anneau **Z**/n**Z** et de ses éléments inversibles. Théorème chinois et résolution de systèmes de congruences dans **Z**. Exemples élémentaires d'équations diophantiennes.

6. Racines d'un polynôme, multiplicité. Éléments algébriques et transcendants. Extensions algébriques. Corps algébriquement clos. Corps de rupture et corps de décomposition. Corps finis.

7. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé. Sommes de Newton. Résultant et discriminant.
Localisation des racines d'un polynôme à coefficients réels ou complexes.

8. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps. Décomposition en éléments simples. Cas réel et complexe.

IV. Formes bilinéaires et quadratiques sur un espace vectoriel

1. Formes bilinéaires. Formes bilinéaires alternées. Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques, forme polaire d'une forme quadratique (en caractéristique différente de 2).
Éléments orthogonaux, interprétation géométrique.
Formes non dégénérées. Adjoint d'un endomorphisme.
Représentation matricielle, changement de base. Rang d'une forme bilinéaire.

2. Orthogonalité. Sous-espaces isotropes. Décomposition d'une forme quadratique en somme de carrés. Théorème d'inertie de Sylvester. Classification dans le cas de **R** ou **C**.
Procédés d'orthogonalisation.

3. Espaces vectoriels euclidiens, espaces vectoriels hermitiens. Isomorphisme d'un espace vectoriel euclidien avec son dual. Supplémentaire orthogonal. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme. Bases orthonormales.

4. Groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal.
Décomposition d'un automorphisme orthogonal en produit de réflexions. Endomorphismes symétriques, endomorphismes normaux. Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique.
Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles, l'une étant définie positive.
Décomposition polaire dans GL(n,**R**).
Espaces vectoriels euclidiens de dimension 2 ou 3 : groupe des rotations ; produit mixte, produit vectoriel ; angles.

5. Groupe unitaire, groupe spécial unitaire.
Diagonalisation des endomorphismes normaux.
Décomposition polaire dans GL(n,**C**).

V. Géométries affine, projective et euclidienne

Tous les espaces considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.

1. Espace affine et espace vectoriel associé. Application affine et application linéaire associée.
Sous-espaces affines, barycentres. Repères affines, équations d'un sous-espace affine.
Groupe affine, notion de propriété affine. Groupe des homothéties-translations, affinités.
Parties convexes, enveloppe convexe d'une partie d'un espace affine réel. Points extrémaux.

2. Espaces projectifs. Coordonnées homogènes, éléments à l'infini. Application projective (ou homographie) associée à une application linéaire injective. Groupe projectif.
Droite projective : groupe des homographies, birapport.

3. Groupe des isométries d'un espace affine euclidien. Déplacements et antidéplacements.
Décomposition en produit de réflexions.

4. Espace affine euclidien de dimension 2.
Formes réduites d'une isométrie. Similitudes directes et indirectes. Groupe des isométries laissant stable une partie du plan. Polygones réguliers.
Relations métriques dans le triangle.
Utilisation des nombres complexes en géométrie plane.

5. Espace affine euclidien de dimension 3.
Rotations, décomposition en produit de demi-tours. Forme réduite d'un déplacement. Vissages.
Groupe des isométries laissant stable une partie de l'espace. Polyèdres réguliers.

6. Coniques et quadriques. Application des formes quadratiques à l'étude des coniques du plan affine euclidien et des quadriques de l'espace affine euclidien de dimension 3. Propriétés géométriques (affines et métriques) des coniques.

VI. Analyse à une variable réelle

1. Nombres réels
Définition du corps **R** des nombres réels. Topologie de **R.** Structure des sous-groupes additifs de **R**. Droite numérique achevée.
Suites de nombres réels : convergence, valeur d'adhérence. Limites inférieure et supérieure. Suites de Cauchy. Complétude de **R**. Suites définies par une relation de récurrence. Théorème de Bolzano-Weierstrass. Parties compactes de **R**. Parties connexes de **R**.

Convergence des séries à termes réels. Séries géométriques. Séries à termes positifs. Relations de comparaison. Comparaison d'une série et d'une intégrale. Estimations des restes. Convergence absolue. Produits de séries. Séries alternées.

Nombres algébriques et transcendants : exemples.

2. Continuité

Fonctions définies sur une partie de **R** : limite, continuité à droite, à gauche, continuité. Fonctions réglées.
Opérations algébriques sur les fonctions continues. Propriétés des fonctions continues sur un intervalle. Étude de la continuité des fonctions monotones. Continuité d'une fonction réciproque.

3. Dérivabilité

Dérivée en un point, dérivée à droite, à gauche. Fonction dérivable sur une partie ouverte. Opérations algébriques sur les fonctions dérivables. Dérivée d'une fonction composée. Dérivabilité d'une fonction réciproque. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis. Application au sens de variation d'une fonction.
Dérivées d'ordre supérieur. Applications de classe C^k, de classe C^k par morceaux. Dérivée d'ordre k d'un produit de deux fonctions. Différentes formules de Taylor. Développements limités. Développements asymptotiques. Exemples. Opérations algébriques sur des développements limités et asymptotiques.

4. Intégrale de Riemann et calcul de primitives

Propriétés de l'intégrale. Formules de la moyenne. Primitives d'une fonction continue. Changement de variable. Intégration par parties. Méthodes usuelles de calcul d'intégrales.

5. Suites et séries de fonctions

Convergence simple, convergence uniforme. Continuité et dérivabilité de la limite. Cas des séries de fonctions : convergence normale.

6. Fonctions usuelles

Fonctions polynômes, fonctions rationnelles. Logarithmes. Exponentielles. Fonctions puissances. Fonctions circulaires et hyperboliques. Fonctions circulaires et hyperboliques réciproques.

7. Convexité

Fonctions convexes d'une variable. Caractérisation de la convexité. Inégalités de convexité.

8. Analyse numérique

Interpolation polynomiale. Exemples de méthodes d'approximation polynomiale en norme uniforme ou quadratique. Exemples de polynômes orthogonaux.
Résolution approchée des équations f(x) = 0. Méthodes itératives, méthode de Newton ; estimation de l'erreur. Intégration numérique : méthode des trapèzes,de Simpson, de Gauss ; estimation de l'erreur.

VII. Analyse à une variable complexe

1. Séries entières

Rayon de convergence. Propriétés de la somme d'une série entière sur son disque de convergence : continuité, dérivabilité par rapport à la variable complexe.
Fonctions analytiques sur un ouvert. Principe des zéros isolés. Opérations algébriques sur les fonctions analytiques. Composition.
Exponentielle complexe ; propriétés. Extension des fonctions circulaires au domaine complexe.
Développement en série entière des fonctions usuelles.

2. Fonctions d'une variable complexe

Fonctions holomorphes. Conditions de Cauchy-Riemann. Intégrale d'une fonction holomorphe le long d'un chemin. Primitive d'une fonction holomorphe. Détermination du logarithme.
Théorème de Cauchy. Formule de Cauchy. Analyticité d'une fonction
holomorphe. Principe du prolongement analytique. Principe du maximum.
Fonctions méromorphes. Séries de Laurent. Théorème des résidus.
Inversion des fonctions holomorphes.

Suites et séries de fonctions holomorphes.

VIII. Calcul différentiel

1. Topologie de R^n

Parties ouvertes, fermées. Voisinages. Parties compactes. Théorème de Bolzano-Weierstrass. Parties connexes. Normes usuelles. Limites. Applications continues. Complétude de $\mathbf{R}^n$.

2. Fonctions différentiables

Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Différentielle. Dérivée selon un vecteur. Dérivées partielles. Opérations algébriques sur les applications différentiables. Composition d'applications différentiables. Théorème des accroissements finis. Applications de classe C^1. Matrice jacobienne. Applications de classe C^k. Dérivées partielles d'ordre k. Interversion de l'ordre des dérivations. Différentes formules de Taylor.
Étude locale des applications à valeurs dans **R**. Développements limités. Recherche des extrema locaux ; cas des fonctions convexes.
Difféomorphismes. Théorème d'inversion locale. Théorème des fonctions implicites. Application aux extrema liés.

3. Équations différentielles

Équations différentielles de la forme x' = f(x, t). Théorème de Cauchy-Lipschitz. Solutions maximales. Dépendance par rapport aux conditions initiales, par rapport à un paramètre. Exemples classiques d'intégration par quadratures.
Systèmes différentiels linéaires.
Méthode de variation de la constante. Cas des coefficients constants. Équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à un.
Exemples d'équations différentielles d'ordre deux : équations de Legendre, de Bessel, etc.

IX. Calcul intégral et probabilités

1. Espaces mesurables, tribus. Mesures positives sigma-finies, mesures de probabilité. Intégrale des fonctions mesurables positives, théorème de convergence monotone. Fonctions intégrables, théorème de convergence dominée. Continuité et dérivabilité d'intégrales dépendant d'un paramètre. Espaces L^P, où $1 \leq p \leq \infty$.

2. Intégrale de Lebesgue

Mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$ (la construction pourra être admise). Intégrales semi-convergentes des fonctions d'une variable. Théorème de Fubini. Changement de variables dans une intégrale multiple. Calculs d'aires de domaines plans et de volumes. Convolution et application à des problèmes d'approximation.

3. Analyse de Fourier

Séries de Fourier des fonctions localement intégrables périodiques d'une variable réelle. Lemme de Riemann-Lebesgue.

Produit de convolution de fonctions périodiques. Théorèmes de Dirichlet et de Fejer.
Théorie L^2 : convergence en moyenne quadratique, formule de Parseval.
Transformée de Fourier d'une fonction intégrable sur $\mathbf{R}^n$. Lemme de Riemann-Lebesgue.
Formule d'inversion. Transformée d'un produit de convolution. Théorie L^2 : formule de Plancherel.
Application des séries de Fourier et de la transformation de Fourier à des problèmes d'équations aux dérivées partielles et d'équations intégrales.

4. Probabilités

Variables aléatoires, lois de probabilité.
Espérance, variance d'une variable aléatoire à valeurs réelles ou complexes. Exemples de lois : loi binomiale, loi de Poisson, loi uniforme, loi normale, loi exponentielle.
Fonction caractéristique. Famille d'événements, de tribus, ou de variables indépendantes. Convolution de lois.
Convergence de suites de variables aléatoires : en probabilité, en moyenne d'ordre un ou deux, en loi.
Loi faible des grands nombres. Théorème de la limite centrale.

X. Analyse fonctionnelle

1. Topologie et espaces métriques

Topologie d'un espace métrique. Suites. Valeurs d'adhérence. Limites. Applications continues. Homéomorphismes. Produit fini d'espaces métriques.
Compacité. Connexité. Composantes connexes. Connexité par arcs.
Propriétés métriques : applications lipschitziennes, applications uniformément continues.
Espaces métriques complets. Théorème du point fixe pour les applications contractantes.
Théorème de Baire et applications.

2. Espaces vectoriels normés sur **R** ou **C**.

Topologie d'un espace vectoriel normé. Normes équivalentes. Cas des espaces de dimension finie. Espaces de Banach. Séries absolument convergentes dans un espace de Banach.
Applications linéaires continues, norme.
Norme de la convergence uniforme. Espace des fonctions continues sur un espace métrique compact. Théorème de Stone-Weierstrass. Étude de la compacité de parties d'un espace vectoriel normé : théorème de Riesz ; théorème d'Ascoli.

3. Espaces de Hilbert

Projection sur un convexe fermé. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé.
Dual d'un espace de Hilbert.
Cas des espaces $\ell^2(\mathbf{N})$ et $\mathcal{L}^2(\Omega)$, pour un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$.
Bases hilbertiennes (cas des espaces de Hilbert séparables). Exemples de bases : fonctions trigonométriques, polynômes orthogonaux.
Exemples d'applications linéaires continues entre espaces de Hilbert.

XI. Géométrie différentielle

1. Courbes et surfaces

Courbes paramétrées dans $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$. Étude locale, tangente, plan osculateur, branches infinies.
Étude métrique des courbes : longueur d'un arc, paramétrisation normale, repère de Frenet.
Applications à la cinématique du point.
Surfaces paramétrées dans $\mathbf{R}^3$. Étude locale, plan tangent, normale, position par rapport au plan tangent.

2. Applications de l'analyse à la géométrie

Aspects géométriques des théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites : hypersurfaces de $\mathbf{R}^n$, paramétrage local, hyperplan tangent, normale, orientation. Extrema locaux d'une fonction définie sur une hypersurface ; extrema liés.
Aires. Champs de vecteurs, divergence. Théorème de la divergence.
Intégrales curvilignes. Formule de Green-Riemann.
Systèmes différentiels $X' = f(X)$. Courbes intégrales d'un champ de vecteurs.

Épreuves Écrites

Les épreuves écrites comportent deux épreuves :

A. Composition de mathématiques générales

Le programme de cette épreuve est constitué par les titres I à XI ci-dessus.

B. Composition d'analyse et probabilités

Le programme de cette épreuve est constitué par les titres I à XI ci-dessus.

ÉPREUVES ORALES

1ère Épreuve : Épreuve d'Algèbre et Géométrie
2ème Épreuve : Épreuve d'Analyse et Probabilités
Le programme des ces deux épreuves est constitué des titres I à XI ci-dessus.

3ème Épreuve : Épreuve de Modélisation
L'épreuve comporte deux options :
- calcul scientifique : méthodes numériques et symboliques.
- probabilités et statistiques,

L'épreuve porte sur un programme commun aux deux options et sur un programme spécifique à chacune d'elles. Les thèmes applicatifs, qui s'appuient sur le programme des épreuves, font l'objet d'une publication annuelle au bulletin officiel.

Programme de la partie commune

Le programme de cette partie comprend les méthodes numériques, probabilistes, statistiques et symboliques citées dans les programmes des épreuves écrites et celles citées dans les paragraphes suivants. Ces méthodes pourront donner lieu à une illustration sur machine à l'aide d'un des logiciels mentionnés ci-dessous.

Les candidats devront pouvoir montrer leur capacité :

- à distinguer les représentations exactes ou approchées des objets mathématiques ;
- à évaluer le coût et les limitations des algorithmes : complexité, précision numérique ;
- à analyser la pertinence des modèles et les différents types d'erreur (expérimentale, de méthode, de calcul) ;
- à utiliser l'un des logiciels mentionnés ci-dessous pour mettre en évidence les propriétés des modèles mathématiques et des méthodes numériques, probabilistes, statistiques ou symboliques de ce programme.

1. Représentations graphiques de données

Étude et représentations de fonctions, de courbes et de surfaces (paramétriques et implicites).
Interpolation polynomiale par morceaux à une variable, interpolation affine par morceaux à deux variables.
Échantillons, histogrammes.

2. Modèles

Probabilités discrètes (tirages uniformes, probabilités conditionnelles).
Lois de probabilités classiques.
Problèmes d'évolution :

- Chaînes de Markov (espaces d'états finis, temps discret).
- Équations différentielles ordinaires, systèmes dynamiques en dimension deux et trois. Espaces de phase. Étude qualitative. **Exemples de fonctions de Liapounov, application à la stabilité.**

3. Validation et précision de résultats

Conditionnement des systèmes linéaires.
Schéma numérique d'Euler pour le problème de Cauchy pour un système différentiel de la forme $X' = f(X,t)$.
Précision statistique : intervalle de confiance d'une moyenne.

4. Ajustement de modèles

Moindres carrés linéaires (expression avec et sans contrainte) ; exemples non linéaires.
Modèles linéaires simples en dimension 1, test d'ajustement du χ^2.

5. Calcul numérique et symbolique

Utilisation des logiciels Maple ou MuPAD, et Matlab ou Scilab : intégration, différentiation, calcul de sommes et d'intégrales, résolution d'équations algébriques et différentielles.

Méthode de Monte Carlo pour les intégrales multiples.
Résolution de systèmes d'équations linéaires. **Factorisation LU, algorithme du gradient pour les systèmes linéaires symétriques définis positifs.**
Recherche des valeurs propres. **Méthode de Jacobi, méthode de la puissance.**
Résolution de systèmes d'équations non linéaires : méthode de Newton, méthode des approximations successives.

Programme de la partie optionnelle : Calcul numérique et symbolique.

1. Calcul symbolique sur les polynômes

Algorithme d'Euclide. Calcul effectif des résultants, application à l'élimination. Localisation des racines (en particulier suites de Sturm). **Exemples d'étude locale de courbes algébriques planes.**

2. Équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles

Aspects numériques du problème de Cauchy. Méthodes à un pas : consistance, stabilité, convergence, notion d'ordre ; exemples de méthodes d'ordre élevé et de méthodes implicites.
Exemples de discrétisation de problèmes aux limites en dimension un. **Différences finies, éléments finis P1, méthode de Galerkin.**
Équations différentielles du second ordre à coefficients polynomiaux. **Fonctions de Bessel, fonctions de Legendre.**
Méthode des caractéristiques pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels.
Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre à coefficients constants et problèmes aux limites associés. **Équations de Laplace, de la chaleur, des ondes.**

3. Optimisation et approximation

Interpolation polynomiale par morceaux.
Extrema des fonctions réelles de n variables réelles : multiplicateurs de Lagrange.
Algorithmes de gradient à pas optimal ou à pas constant ; algorithme du gradient conjugué pour une application quadratique.
Méthode des moindres carrés et applications.
Programmation linéaire.

Programme de la partie optionnelle : Probabilités et Statistique

Utilisation de lois usuelles pour modéliser certains phénomènes aléatoires. **Exemples : processus de comptage, temps d'attente ou durée de vie, erreurs de mesure.**
Vecteurs aléatoires gaussiens et théorème de limite centrale vectoriel. Théorème de Cochran.
Modèle linéaire gaussien : estimation par la méthode des moindres carrés, test de Student et de Fischer.
Convergence presque sûre, équiintégrabilité et convergence L^1. Lemme de Borel-Cantelli et loi forte des grands nombres. Transformée de Laplace. **Inégalité de Cramer-Chernoff.**
Fonction de répartition empirique. **Théorème de Glivenko-Cantelli, tests de Kolmogorov-Smirnov.**

Espérance conditionnelle.
Chaînes de Markov homogènes à espace d'états au plus dénombrable : états transitoires, récurrents. Chaînes irréductibles apériodiques à espace d'états finis. Exemples d'utilisation des théorèmes de convergence des martingales à temps discret (aucune démonstration ne sera exigée). **Marches aléatoires, ruine du joueur, processus de branchement (par exemple, du type Galton-Watson), évaluation d'actifs financiers, files d'attente.**