

(D04)

Résumé : on définit le problème du transport d'un produit à travers un réseau dont les capacités sont limitées, et on présente des algorithmes permettant de résoudre ce problème de façon optimale en termes de quantité transportée ou de coût du transport.

Mots clefs : graphes et réseaux, plus court chemin.

- *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Ce texte comporte un exercice de programmation et des suggestions de développement largement indépendantes les unes des autres. Vous n'êtes pas tenu(e) de suivre ces suggestions. Ce n'est pas une épreuve centrée sur la programmation. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte.*

1. Un exemple

Une société d'import-export dispose dans les ports de Veracruz, São Paulo, Conakry et Abidjan, de stocks de café pour lesquels elle a reçu des commandes d'importateurs de Dunkerque, Bordeaux, Saint-Nazaire et Le Havre. Les stocks disponibles et les quantités commandées sont les suivants :

Veracruz : 120t São Paulo : 100t Conakry : 100t Abidjan : 100t
Dunkerque : 100t Bordeaux : 80t Saint-Nazaire : 90t Le Havre : 150t

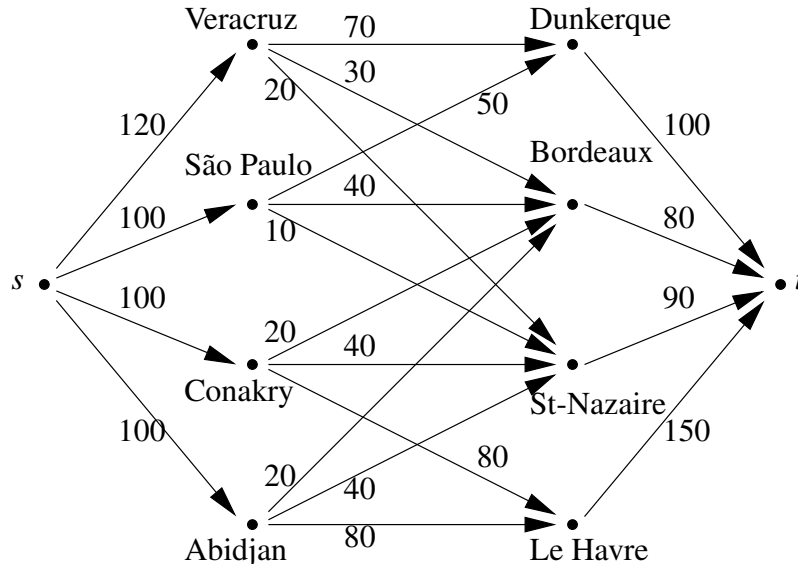
Divers bateaux se rendent des ports étrangers considérés vers les ports français de destination ; le tonnage dont ils disposent est donné par le tableau ci-dessous :

	Dunkerque	Bordeaux	Saint-Nazaire	Le Havre
Veracruz	70	30	20	-
São Paulo	50	40	10	-
Conakry	-	20	40	80
Abidjan	-	20	40	80

On se pose le problème suivant : peut-on satisfaire les commandes et si oui, de quelle manière ? Dans la négative, comment les satisfaire au mieux sachant que les commandes de Bordeaux et du Havre sont prioritaires ?

On peut modéliser ce problème à l'aide d'un graphe dont les sommets sont les ports d'expédition et de destination et les arcs entre deux ports sont étiquetés par la capacité de transport disponible entre ces deux ports. Pour prendre en compte les stocks disponibles et les quantités

commandées on adjoint au graphe deux sommets s et t , un arc de s vers chaque port d'expédition, étiqueté par la quantité disponible dans ce port, et un arc de chaque port de destination vers t , étiqueté par la quantité commandée par ce port.



Le problème devient : peut-on faire passer dans le graphe, de s vers t , $100+80+90+150 = 420$ tonnes de café en respectant les capacités de transport indiquées ? Sinon, quelle est la plus grande quantité que l'on peut transporter de s vers t et comment faire pour que les arcs Dunkerque- t et Bordeaux- t soient utilisés de préférence aux autres arcs aboutissant en t ?

2. Définitions et notations

Un *réseau de transport* est défini par les données suivantes :

- un ensemble X de nœuds. On note $N = \text{Card}(X)$;
- un ensemble A d'arcs orientés joignant les nœuds de X . On note $M = \text{Card}(A)$;
- une fonction capacité $c : A \longrightarrow \mathbf{R}^{+*}$; et
- deux nœuds distincts s (source) et t (puits, trunk en anglais) éléments de X .

On note $R = (X, A, c, s, t)$. Un *flot* circulant sur R est une application $\phi : A \longrightarrow \mathbf{R}^+$. Ce flot est dit *admissible* s'il vérifie les propriétés :

- (1) $\forall a \in A, 0 \leq \phi(a) \leq c(a)$
- (2) $\forall x \in X \setminus \{s, t\}, \sum_{a=(x, \cdot)} \phi(a) = \sum_{a=(\cdot, x)} \phi(a)$

$\sum_{a=(x, \cdot)}$ désigne la somme portant sur tous les arcs partant de x , et $\sum_{a=(\cdot, x)}$ celle portant sur tous les arcs arrivant en x . La condition (1) signifie que le flot à travers l'arc a est limité par la capacité de a ; la condition (2) signifie qu'en chaque nœud autre que s et t , tout ce qui arrive

repart (loi de Kirchhoff). La valeur du flot ϕ est

$$|\phi| = \sum_{a=(s,\cdot)} \phi(a) - \sum_{a=(\cdot,s)} \phi(a) = \sum_{a=(\cdot,t)} \phi(a) - \sum_{a=(t,\cdot)} \phi(a). \quad (3)$$

Dans l'exemple précédent il s'agit de trouver un flot circulant sur le réseau de transport associé, de valeur 420. Plus généralement, les problèmes de flots sont :

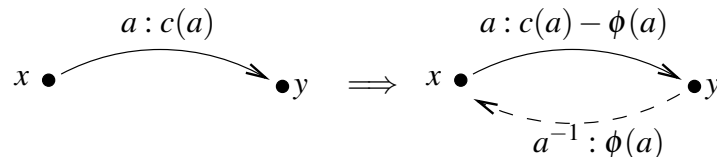
- le problème du flot maximal : trouver un flot admissible ϕ de valeur maximale ; et
- le problème du flot de coût minimal : pour chaque arc a on définit un coût unitaire de transport $\gamma(a) \in \mathbf{R}$. Le coût d'un flot admissible ϕ est alors $\Gamma(\phi) = \sum_{a \in A} \gamma(a)\phi(a)$. Il s'agit de trouver un flot admissible de valeur donnée (maximale ou non) et de coût minimal.

S'agissant du problème du flot maximal, on peut se ramener au cas simplifié où deux nœuds quelconques de X sont reliés par au plus un arc (s'il y en a plusieurs, les remplacer par un arc unique et additionner les capacités). Par contre, dans le problème du flot de coût minimal une telle simplification n'est pas toujours possible.

Un *chemin* dans le réseau R est une suite (a_1, a_2, \dots, a_n) d'arcs distincts appartenant à A tel que l'origine de a_1 est s , le but de a_n est t et l'origine de chaque arc intermédiaire est égale au but de l'arc précédent. La capacité d'un chemin est le minimum des capacités des arcs constituant le chemin. Le *flot saturant le chemin* (a_1, a_2, \dots, a_n) est le flot circulant sur R défini par $\phi(a) = \min(c(a_i), 1 \leq i \leq n)$ si a est l'un des arcs a_i et $\phi(a) = 0$ sinon.

Étant donné un réseau de transport $R = (X, A, c, s, t)$ et un flot ϕ admissible sur R , on définit le *réseau résiduel* associé, $R_\phi = (X, A_\phi, c_\phi, s, t)$ de la manière suivante. Pour chaque arc $a \in A$:

- si $\phi(a) < c(a)$: on place a dans A_ϕ avec une capacité $c_\phi(a) = c(a) - \phi(a)$; et
- si $\phi(a) > 0$: on place un *arc retour* a^{-1} symétrique de a dans A_ϕ avec une capacité $c_\phi(a^{-1}) = \phi(a)$.



A_ϕ est l'ensemble des arcs ainsi définis. S'il existe plusieurs arcs de x à y dans A , il y a au plus autant d'arcs retour dans A_ϕ . De même, si A contient deux arcs symétriques, $a = (x, y)$ et $b = (y, x)$ alors A_ϕ peut contenir les quatre arcs a, b, a^{-1} et b^{-1} .

Exemple : le dessin de gauche de la Figure.1 représente les arcs et les capacités d'un réseau de transport R , le dessin du milieu représente les valeurs d'un flot ϕ circulant sur ce réseau et le dessin de droite représente les arcs et les capacités du réseau résiduel associé. Les arcs en trait tireté sont les arcs retour. Les ensembles de nœuds S et T sur le dessin du milieu seront expliqués dans la section suivante.

Soit ψ un flot quelconque sur le réseau résiduel R_ϕ , admissible ou non. On note $\phi' = \phi + \psi$ le flot sur R défini de la manière suivante. Pour chaque arc $a \in A$:

- si $a \in A_\phi$ et $a^{-1} \in A_\phi$: $\phi'(a) = \phi(a) + \psi(a) - \psi(a^{-1})$;
- si $a \in A_\phi$ et $a^{-1} \notin A_\phi$: $\phi'(a) = \phi(a) + \psi(a)$;
- si $a \notin A_\phi$ et $a^{-1} \in A_\phi$: $\phi'(a) = \phi(a) - \psi(a^{-1})$; et

– si $a \notin A_\phi$ et $a^{-1} \notin A_\phi$: ce cas est impossible car $c(a) > 0$.

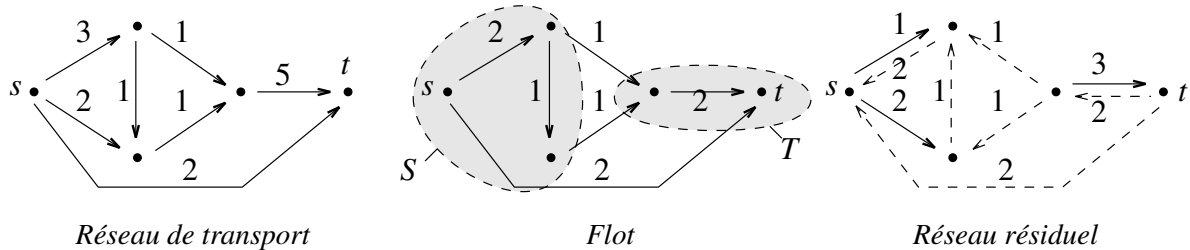


FIG. 1. Exemple de réseaux

Inversement, si ϕ' est un flot quelconque sur le réseau R , on peut trouver un flot ψ sur R_ϕ tel que $\phi' = \phi + \psi$: Il suffit de lire les formules précédentes à l'envers, et il y a unicité de ψ si l'on impose dans le premier cas $\psi(a)\psi(a^{-1}) = 0$. Le flot ψ ainsi déterminé est noté $\psi = \phi' - \phi$.

Proposition 1.

Si ψ est un flot admissible sur R_ϕ alors $\phi' = \phi + \psi$ est un flot admissible sur R .

Si ϕ' est un flot admissible sur R alors $\psi = \phi' - \phi$ est un flot admissible sur R_ϕ .

Lorsque ϕ' et ψ sont admissibles sur leurs réseaux respectifs, on a $|\phi'| = |\phi| + |\psi|$.

3. Flot maximal : méthode de Ford-Fulkerson

Considérons le réseau de transport R , le flot ϕ et le réseau résiduel R_ϕ représentés à la section précédente. ϕ est un flot maximal pour les deux raisons équivalentes suivantes :

- il n'existe aucun chemin allant de s à t dans R_ϕ , donc il ne peut circuler aucun flot de valeur strictement positive dans ce réseau ; et
- les ensembles de nœuds S et T représentés en gris sont tels que tout arc dirigé de S vers T est saturé ($\phi(a) = c(a)$), donc S ne peut pas exporter plus de flot vers T .

Étant donné un réseau $R = (X, A, c, s, t)$, on appelle *coupe* de R toute partition $X = S \cup T$ telle que $s \in S$ et $t \in T$. La capacité de la coupe (S, T) est la somme des capacités des arcs joignant un nœud de S à un nœud de T . On la note $c(S, T)$.

Théorème 1. (Ford-Fulkerson, 1956)

Si ϕ est un flot admissible sur R , alors la valeur de ϕ est au plus égale à la capacité d'une coupe quelconque de R . S'il existe une coupe dont la capacité est égale à $|\phi|$ alors ϕ est maximal. Si ϕ est un flot maximal, alors il existe une coupe de R de capacité $|\phi|$.

On en déduit une méthode de calcul itératif d'un flot maximal pouvant circuler dans R :

- choisir pour ϕ_0 un flot admissible quelconque (par exemple le flot nul ou un flot construit au « jugé ») ;
- si ϕ_k est construit et s'il existe un chemin dans R_{ϕ_k} , soit ψ_k le flot de R_{ϕ_k} saturant ce chemin : poser $\phi_{k+1} = \phi_k + \psi_k$ (cette étape sera appelée *augmentation de flot* dans la suite) ; et
- s'il n'existe pas de tel chemin alors $\phi = \phi_k$ est un flot maximal.

On peut prouver que si les capacités des arcs du réseau R sont entières alors l'algorithme précédent termine, quelle que soit la manière dont on choisit le chemin à saturer de s à t dans R_{ϕ_k} , et que sa complexité est $\mathcal{O}(MNU)$ où M et N sont les nombres d'arcs et de nœuds dans R , et $U = \max\{c(a), a \in A\}$. De plus, si l'on choisit systématiquement comme chemin à saturer un plus court chemin de s à t dans R_{ϕ_k} alors on obtient un algorithme qui termine quelles que soient les capacités, et de complexité $\mathcal{O}(M^2N)$:

Théorème 2. (Edmonds-Karp, 1972)

Soit (ϕ_0, ϕ_1, \dots) une suite de flots dans un réseau $R = (X, A, c, s, t)$ chacun se déduisant du précédent par saturation d'un chemin de longueur minimale dans le réseau résiduel. Pour $x \in X$ on note $d_k(x) \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ la distance de x à t dans R_{ϕ_k} comptée en nombre d'arcs. Alors :

- pour tout $x \in X$ la suite $(d_k(x))$ est croissante ;
- si un arc (x, y) est saturé lors de l'augmentation de ϕ_k à ϕ_{k+1} puis est à nouveau saturé lors de l'augmentation de ϕ_ℓ à $\phi_{\ell+1}$ alors $d_\ell(x) \geq d_k(x) + 2$ et $d_\ell(y) \geq d_k(y) + 2$; et
- le nombre d'augmentations de flot est majoré par MN .

4. Flot de coût minimal

Soit $R = (X, A, c, s, t)$ un réseau de transport, $\gamma : A \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de coût et ϕ un flot admissible dans R . On dit que ϕ est de coût minimal si le coût $\Gamma(\phi) = \sum_{a \in A} \gamma(a)\phi(a)$ est minimal parmi les coûts des flots admissibles ayant même valeur que ϕ . Il s'agit ici de trouver un flot ϕ admissible de coût minimal dont la valeur est imposée. On a les résultats suivants.

Proposition 2.

Soit ϕ un flot admissible dans R . Alors ϕ est de coût minimal si et seulement si le réseau résiduel, R_ϕ , ne contient pas de cycle de coût strictement négatif.

Théorème 3. (Busacker-Gowen, 1961)

Soient ϕ et ϕ' deux flots admissibles dans un réseau R , ϕ' s'obtenant à partir de ϕ en saturant un chemin de R_ϕ de coût minimal. Alors si ϕ est de coût minimal, il en est de même de ϕ' .

On en déduit deux méthodes de calcul d'un flot de valeur donnée v et de coût minimal :

- (1) chercher un flot initial de valeur v , et tant qu'il reste des cycles de coût strictement négatif dans le réseau résiduel, les saturer ; et
- (2) partir d'un flot de coût minimal et de valeur nulle et augmenter itérativement le flot obtenu en saturant en priorité les chemins de coût minimal jusqu'à obtenir un flot de valeur v .

Exercice de programmation :

- Il vous est demandé de rédiger un programme conforme aux spécifications ci-dessous dans l'un des langages C, Caml ou Java à votre choix. Ce programme devra être accompagné d'un exemple d'exécution permettant d'en vérifier le bon

fonctionnement. La clarté et la concision du programme seront des éléments importants d'appréciation pour le jury.

Écrire un programme vérifiant qu'un flot donné est admissible (satisfaction des lois de Kirchhoff et respect des contraintes de capacité). On supposera qu'il existe au plus un arc reliant deux nœuds donnés et on représentera le réseau de transport au choix :

- par une matrice C telle que $C(i, j)$ est la capacité de l'arc (i, j) .
- par une liste de triplets $(i, j, c(i, j))$ où i, j désignent des nœuds et $c(i, j)$ la capacité de l'arc (i, j) .

Le flot dont on doit contrôler le caractère admissible sera représenté de manière analogue.

Suggestions pour le développement

- *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées ci-dessous.*
 - Résoudre le problème de transport posé en exemple. On étudiera notamment comment respecter les priorités attribuées aux ports de Bordeaux et du Havre.
 - Proposer un exemple non trivial qui illustre l'utilisation des arcs retour.
 - Démontrer le théorème de Ford-Fulkerson et justifier les bornes de complexité données dans le texte.
 - Étudier le cas où les capacités des arcs ne sont pas des nombres entiers.
 - Démontrer le théorème d'Edmonds-Karp.
 - Démontrer le théorème de Busacker-Gowen.
 - Détailler une implémentation possible de la méthode de Ford-Fulkerson avec la stratégie d'Edmonds-Karp. On précisera les structures de données utilisées et les algorithmes à mettre en œuvre, notamment pour déterminer un chemin de longueur minimale dans le réseau résiduel et on justifiera la complexité de cette implémentation.
 - Détailler une implémentation possible du calcul d'un flot de valeur donnée et de coût minimal. On précisera les structures de données utilisées et les algorithmes à mettre en œuvre, et on justifiera la complexité de cette implémentation.
 - Présenter une autre méthode permettant de déterminer un flot maximal pouvant circuler sur un réseau et la comparer à celle de Ford-Fulkerson notamment en termes de complexité.
 - Étudier des variantes possibles du problème du flot maximal : réseau avec plusieurs sources ou plusieurs puits, flot minimal imposé sur les arcs, etc.
 - Un arc d'un réseau de transport est *névralgique* si sa suppression a pour conséquence de diminuer la valeur d'un flot maximal pouvant circuler sur le réseau. Comment déterminer dans un réseau de transport s'il y a des arcs névralgiques et lesquels ?